國立花蓮女子高級中學115學年度第1次正式教師甄選【數學科】筆試試題卷

※ 作答說明：
1. 本試題卷共有2張2面，另附一本答案卷。
2. 本試卷分為兩部分：填充題共16題，每題5分；計算題共8題，每題6分；合計總分為128分。
3. 如有計算需求，試題卷背面、答案卷背面，或答案卷後所提供的空白計算紙皆可使用；
   唯請確保答案卷正面之作答結果可被清楚評閱。

一、填充題（每題5分）

1. 擲一顆均勻骰子三次，觀察其出現的點數依次為 a、b、c，求點數 a、b、c 中最大點數是奇數之機率為_________。

2. 設二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$A^2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，其中 I 為二階單位方陣，試求 A 的乘法反方陣 $A^{-1}=$_________。

3. 一袋裝有大小相同的6顆紅球及若干顆白球，每球被取出的機會均等，連續自袋中取球 n 次，每次取一球觀察其顏色後放回。假設每次取球的結果互相獨立，若已知取得紅球次數的期望值為6次，標準差為2次。試求 $n=$_________。

4. 學校舉辦高二的象棋比賽，由於高二參加此比賽的學生人數少於10人，因此有兩位高一學生被允許參加比賽，若每位參賽選手都必須與其他選手各比賽一次，且勝者得1分，和者得0.5分，敗者得0分。已知兩位高一學生得分總和為8分，且知每位高二的學生皆與其同年級同學的得分相同，則高二參加此比賽的學生人數為_________人。

5. ΔABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=5$、$\overline{CA}=6$，設 $\overline{AB}$ 邊上的中垂線與 $\overline{AC}$ 邊上的高相交於 P 點，且令 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求實數對 $(x, y)=$_________。

6. 已知點 A、P 在直線 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$ 上；點 B、Q 在直線 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$ 上，若 $\overline{PQ}$ 恰為直線 L_1 與 L_2 的公垂線段，且 $\overline{AP}=3$，$\overline{BQ}=4$，試求向量內積 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=$_________。

7. 設多項式 $f(x)=x^3+x^2-4x+k$，$g(x)=x^2+ax+2$，其中 a, k 皆為實數。已知 $g(x)$ 整除 $f(x)$，且方程式 $g(x)=0$ 有虛根，試求方程式 $f(x)=0$ 的解為_________。

8. 求極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(3n-1)^2}{n^3}\right]=$_________。

9. 設一個小於1的正有理數 q 將其表示成最簡分數為 $\dfrac{b}{a}$，若已知其分子與分母的乘積 $a\times b=30!$，其中 $30!=30\times29\times28\times\cdots\times2\times1$，試求滿足此關係的正有理數 q 共有_________個。

10. 設 x^{2026} 除以 $(x-1)^2(x^2+1)$ 的餘式 $r(x)$，求 $r(0)=$_________。

11. 已知 $(\log y)^2+(2^{1+x}+2^{1-x})\log y+(2^{1+2x}+2^{1-2x})=0$，求 $x+y=$_________。

12. 已知空間中三點 $A(\frac{9}{2}, 2, -\frac{1}{2})$、$B(2, 1, 0)$、$C(1, 0, -1)$，求 ΔABC 的垂心坐標為_________。

13. 坐標平面上，設 A 點為曲線 $\Gamma_1: x^2-4x+y+5=0$ 上的一點，且 B 點為曲線 $\Gamma_2: y^2-4y+x+5=0$ 上的一點，試求 A、B 兩點的最小距離為_________。

14. 複數平面上，求滿足 $|z-3+i|-|z+1-3i|=\pm 2\sqrt{2}$ 的所有複數 z 所形成的圖形之漸近線斜率為__________。

15. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，且滿足以下條件：
(1) 一階導函數 $f'(x)$ 存在最小值 -12。 (2) $f(x)$ 的極大值發生在 $x=5$。
(3) 二階導數 $f''(5)=-2$。 (4) $f(x)$ 的極小值為 2。
求此三次函數 $f(x)$ 的反曲點坐標為__________。

16. 已知一個籤筒內有 N 支籤，分別標示 1 至 N 的號碼，且每支籤被抽到的機率相等。現從此籤筒中任意抽出一支籤，並觀察其號碼。設 A 事件為所抽到之籤的號碼為偶數之事件；B 事件為所抽到之籤的號碼為 3 的倍數之事件。
請問在 N 分別為 3 至 2026 的這些正整數，有__________個 N，會使得事件 A 與事件 B 為獨立事件。

二、計算題（每題 6 分） ※ *本大題需提供完整的作法及過程；並在答案卷上標示清楚題號，且可不按照題序作答！*

1. 求滿足方程式 $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{13}$ 的所有整數解。

2. 設三次函數 $f(x)=x^3-x$ 的函數圖形為 Γ，若在 Γ 上取一點 $A(a,\ f(a))$ 對 Γ 做切線 L_1 交 Γ 於 $A_1(x_1,\ y_1)$，其中 $x_1\neq a$ 且 $a\neq 0$；若再過 $A_1(x_1,\ y_1)$ 對 Γ 做切線 L_2 交 Γ 於 $A_2(x_2,\ y_2)$，$x_2\neq x_1$；過 A_2 對 Γ 做切線 L_3 交 Γ 於 $A_3(x_3,\ y_3)$，$x_3\neq x_2$；過 A_3 對 Γ 做切線 L_4 交 Γ 於 $A_4(x_4,\ y_4)$，$x_4\neq x_3$；……；並以此方法不斷做下去，最後當由 $A_{n-1}(x_{n-1},\ y_{n-1})$ 對 Γ 做切線 L_n 交 Γ 得到 $A_n(x_n,\ y_n)$，其中 $x_n\neq x_{n-1}$，且 $n\geq 2$。請以 a、n 表示 x_n 的一般式。

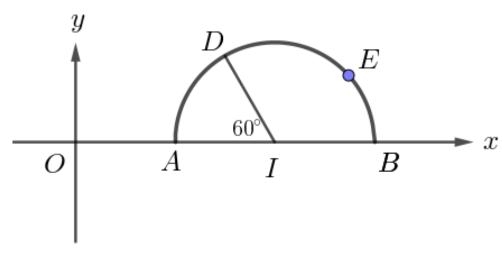
3. 設方程式 $x^2-(1+4i)x-(9-7i)=0$ 的兩根為 x_1 及 x_2，其中 $|x_1|\geq|x_2|$，若複數 z 可使得 $\dfrac{x_1}{x_2}\cdot z$ 為實數，
試求滿足此條件之複數 z 的主幅角 $Arg(z)$。(如非特殊角，請使用反三角函數表示答案)

4. 請利用 $(1+x)^{11}=1+C_1^{11}x+C_2^{11}x^2+\cdots+C_{10}^{11}x^{10}+x^{11}=11\cdot Q(x)+x^{11}+1$，求組合數 C_{25}^{115} 除以 11 的餘數。

5. 設 ΔABC 的三邊長 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=8$，若自點 B、C 分別作 $\overline{BP}\perp\overline{AC}$ 於 P，$\overline{CQ}\perp\overline{AB}$ 於 Q，
試求線段長 $\overline{PQ}$。

6. 坐標平面上，已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1)$，若向量 $\overrightarrow{c}$ 在向量 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $(-\dfrac{6}{25},-\dfrac{8}{25})$，
試求長度 $|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}|$ 的最小值。

7. 如圖所示，已知上半圓 $C:(x-2)^2+y^2=1$，$y\geq 0$，直徑 $\overline{AB}$ 在 x 軸上，圓心 I，
設點 D 為此半圓周上一點，且 $\angle AID=60°$，點 E 為此半圓周上任一點，
試求 $\overline{EA}+\overline{EB}+\overline{ED}$ 的最大值。



8. 已知函數 $y=f(x)=x^4-2x^2+x$，試回答下列各問題：
(1) 設與曲線 $y=f(x)$ 恰有 2 個切點的直線為 $y=g(x)$，求 $g(x)$。
(2) 承(1)，求兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形所圍出之封閉區域的面積。

國立花蓮女子高級中學 115 學年度第 1 次正式教師甄選【數學科】筆試參考答案

一、填充題

1	2	3	4
$\frac{3}{8}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	18	7
5	6	7	8
$\left(\frac{47}{175},\frac{48}{175}\right)$	$\frac{9}{2}$	-3 或 $1\pm i$	$\frac{26}{3}$
9	10	11	12
512	-1012	$\frac{1}{100}$	$(1,2,3)$
13	14	15	16
$\frac{11}{4}\sqrt{2}$	$2\pm\sqrt{3}$	$(17,98)$	674

二、計算題

1. $(7,2)$ 或 $(2,7)$

2. $x_n = a\cdot(-2)^n$ ， $n\geq 1$

3. $\cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{130}})$ 或 $180^\circ+\cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{130}})$（或其他相等角度的表示法）

4. 10

5. $\frac{8}{7}$

6. $\frac{4}{5}$

7. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

8. (1) $g(x)=x-1$；(2) $\frac{16}{15}$